

УДК 532.546

## СМЕЩЕНИЕ ПОДЗЕМНЫХ ВОД РАЗНОГО СОСТАВА В ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

*Э.В. Скворцов, Е.А. Костерина, Д.Р. Ахметшина*

### Аннотация

Исследован массоперенос при одномерной фильтрации в насыщенной трещиновато-пористой среде подземных вод разного состава. Учтена растворимость вещества пористой матрицы под действием жидкости, поступающей в эту среду по трещинам. С использованием преобразования Лапласа найдено аналитическое решение задачи об определении концентрации раствора, образующегося при таком массопереносе. Приведены результаты соответствующих расчетов распределения концентрации в различные моменты времени.

**Ключевые слова:** состав подземных вод, загрязнение, трещиновато-пористая среда, массоперенос, концентрация раствора.

---

### Введение

Математическое моделирование массопереноса при фильтрации растворов в трещиновато-пористых средах вызвано необходимостью оценки степени загрязнения подземных вод и выяснения структуры зон смешения подземных вод разного состава. При постоянной концентрации насыщения основные особенности такого массопереноса описываются известными решениями задачи о миграции радиоактивного загрязнения в трещиноватых породах [1, 2]. В действительности концентрация насыщения, как правило, переменна и зависит от состава подземных вод. Обобщению решений [1, 2] на этот случай посвящена статья [3] (см. также [4]), где дана соответствующая постановка задачи и найдено ее асимптотическое решение для больших значений времени. В настоящей работе дано полное аналитическое решение задачи в случае типового блока неограниченной емкости. Приведены результаты численных расчетов концентрации раствора в зоне смешения подземных вод.

### 1. Постановка задачи

При создании математических моделей массопереноса в трещиновато-пористых средах обычно предполагается, что проницаемость пористой матрицы (блоков) на несколько порядков ниже проницаемости трещин. Отсюда вытекают представления о существовании двух основных механизмов переноса – конвективного в трещинах и молекулярно-диффузионного в блоках [5, 6].

Рассмотрим реакцию трещиновато-пористой среды, заполненной раствором с равновесной концентрацией  $c_*$ , на внедрение по трещинам раствора другого состава. Течение предполагается одномерным, фильтрационный расход  $v$  – постоянным. Поступающий раствор содержит пассивную примесь, влияющую на растворимость вещества пористой матрицы.

Массоперенос в трещинах описывается следующими соотношениями [3]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( mD \frac{\partial c}{\partial x} \right) + q - v \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} (mc) = 0, \quad x > 0, \quad t > 0; \quad (1)$$

$$c(x, 0) = c_*, \quad x > 0, \quad c(0, t) = c_1, \quad c(\infty, t) < \infty, \quad t > 0. \quad (2)$$

Здесь

$$q = q_1 + q_2, \quad (3)$$

$$q_1 = \gamma(c_0 - c), \quad (4)$$

$$c_0(\theta) = \nu\theta + c_*, \quad (5)$$

$x$  – продольная координата,  $t$  – время,  $c$  – концентрация растворяющегося вещества в жидкости,  $v$  – фильтрационный расход,  $D$  – эффективный коэффициент диффузии,  $q_1$  – поток растворенного вещества со стенок трещины [7],  $\theta$  – концентрация пассивной примеси [8],  $\gamma, \nu$  – постоянные,  $c_*$  – равновесная концентрация раствора при  $\theta = 0$ ,  $q_2$  – поток растворенного вещества из блоков,  $m$  – емкость трещин.

Величина  $q_2$  определяется из решения вспомогательной задачи о массопереносе в типовом блоке [6] (ниже параметры блока помечены тильдой):

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \tilde{m} \tilde{D} \frac{\partial \tilde{c}}{\partial y} \right) + \tilde{\gamma}(c_0 - \tilde{c}) - \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{m} \tilde{c}) = 0, \quad (6)$$

$$\tilde{c}(y, 0) = c_*, \quad \tilde{c}(0, t) = c(x, t), \quad (7)$$

причем

$$q_2(x, t) = m\sigma \tilde{D} \frac{\partial \tilde{c}}{\partial y}(0, t), \quad (8)$$

где  $\sigma = 2\tilde{m}/H$  – удельная площадь «окон» из блоков в трещины [1],  $H$  – раскрытие трещин. Распределение пассивной примеси также описывается соотношениями (1)–(8) при  $c = \theta$ ,  $\gamma = \nu = c_* = 0$  и  $\theta(0, t) = \theta_0$  в (2).

Математическая модель массопереноса в виде (1)–(8) отражает основные черты формирования и структуры зон смешения как при перетоке подземных вод из массива горных пород одного состава в массив другого состава, так и при миграции загрязнений из компактной зоны массива. Граничное условие в (7) отвечает случаю блока неограниченной емкости (полупространство). На временах  $t \ll L^2 \tilde{D}$  ( $L$  – характерный линейный размер блока) соотношения (6), (7) описывают процесс массопереноса в блоке любой конфигурации [5].

## 2. Аналитическое решение задачи

При построении решения задачи (1)–(8) использовалось преобразование Лапласа. Распределение пассивной примеси для трещины в пространстве изображений описывается следующим соотношением:

$$\theta(x, s) = \frac{\theta_0}{s} \exp \left[ \frac{vx}{2mD} \left( 1 - \left[ 1 + \frac{4m^2 D}{v^2} \left( s + \sigma \tilde{D}^{1/2} s^{1/2} \right) \right]^{1/2} \right) \right],$$

где  $s$  – параметр преобразования Лапласа. Задача о распределении примеси в блоке является стандартной задачей теплопроводности для полуограниченной области [9], а при известном распределении примеси задача (5)–(7) сводится к задаче теплопроводности с распределенными источниками тепла (см. [10]). Наконец, формула (8) позволяет найти в явном виде представление для величины  $q_2$  потока из блоков в трещину [3].

В результате для определения концентрации раствора в трещине получим уравнение в изображениях:

$$mD \frac{d^2 w}{dx^2} - \nu \frac{dw}{dx} - \left( \gamma + m \left[ s + \sigma \tilde{D}^{1/2} (s + \beta)^{1/2} \right] \right) w + C \left( \gamma + m \sigma \tilde{D}^{1/2} \left[ (s + \beta)^{1/2} - s^{1/2} \right] \right) \frac{\theta(x, s)}{\theta_0} = 0. \quad (9)$$

Здесь  $w(x, s) = (c - c_*) / (c_1 - c_*)$  – безразмерная концентрация,  $\beta = \tilde{\gamma} / \tilde{m}$ ,  $C = \nu \theta_0 / (c_1 - c_*)$ . Решение уравнения (9) при краевых условиях, которые следуют из формулы (2), имеет вид:

$$w(x, s) = \frac{1}{s} (1 - C) \times \\ \times \exp \left[ \frac{vx}{2mD} \left( 1 - \left[ 1 + \frac{4mD}{v^2} \left( \gamma + m \left[ s + \sigma \tilde{D}^{1/2} (s + \beta)^{1/2} \right] \right) \right]^{1/2} \right) \right] + \\ + \frac{C}{s} \exp \left[ \frac{vx}{2mD} \left( 1 - \left[ 1 + \frac{4m^2 D}{v^2} \left( s + \sigma \tilde{D}^{1/2} s^{1/2} \right) \right]^{1/2} \right) \right]. \quad (10)$$

Для восстановления оригинала по формуле (10), как и в работе [1], использовано представление, переводящее экспоненту в интеграл [11]:

$$\exp(-a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp \left( -u^2 - \frac{a^2}{4u^2} \right) du. \quad (11)$$

Это позволяет найти необходимое обратное преобразование Лапласа и, тем самым, распределение концентрации раствора:

$$w(x, t) = (1 - C) I(x, t) + C I_0(x, t), \quad (12)$$

$$I(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_\ell^\infty \exp \left[ \frac{vx}{2mD} - \left( \frac{vx}{2mD} \right)^2 \frac{1}{u} \left( \frac{1}{4} + \frac{\gamma m D}{v^2} \right) - u^2 \right] \times \\ \times \left[ \exp(-Y \sqrt{\beta}) \operatorname{erfc} \left( \frac{Y}{2T} - T \sqrt{\beta} \right) + \exp(Y \sqrt{\beta}) \operatorname{erfc} \left( \frac{Y}{2T} + T \sqrt{\beta} \right) \right] du, \quad (13)$$

$$Y = \frac{\sigma x^2}{4u^2} \frac{\sqrt{\tilde{D}}}{D}, \quad T = \left( t - \frac{Y}{\sigma \sqrt{\tilde{D}}} \right)^{1/2}, \quad \ell = \frac{x}{2\sqrt{Dt}}, \quad (14)$$

$$I_0(x, t) = I(x, t) \quad \text{при} \quad \gamma = \beta = 0. \quad (15)$$

Распределение концентрации раствора, описывающее структуру стационарной зоны смешения, находится из формулы (13):

$$w(x, \infty) = (1 - C) \exp \left[ \frac{vx}{2mD} \left( 1 - \left( 1 + \frac{4\gamma m D}{v^2} + \frac{4\sqrt{\beta \tilde{D}} m^2 D \sigma}{v^2} \right)^{1/2} \right) \right] + C. \quad (16)$$

Следует подчеркнуть, что упомянутая стационарная зона возникает в результате влияния на массоперенос источников концентрации от взаимодействия раствора с породой, а их величины в формулах (4) и (6) зависят от  $\gamma$  и  $\beta$  – констант скоростей растворения в трещинах и блоках [3].

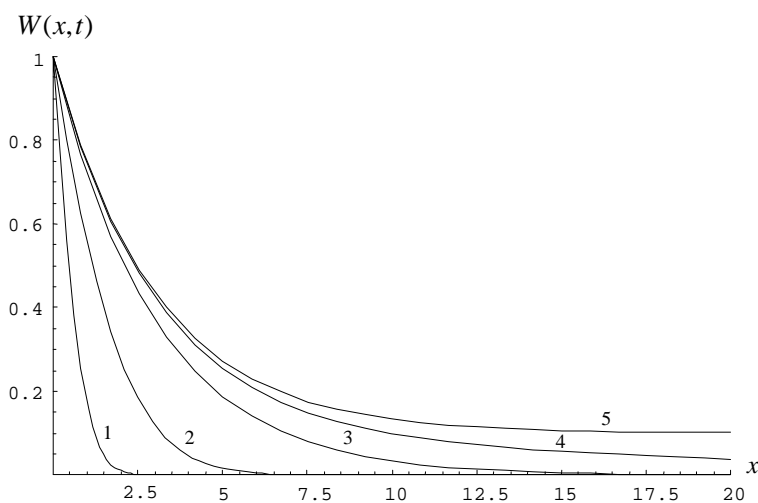


Рис. 1. Концентрация раствора для низкоскоростного потока в различные моменты времени: кривые 1–5 соответствуют значениям  $t = 10, 10^2, 10^3, 10^4, \infty$

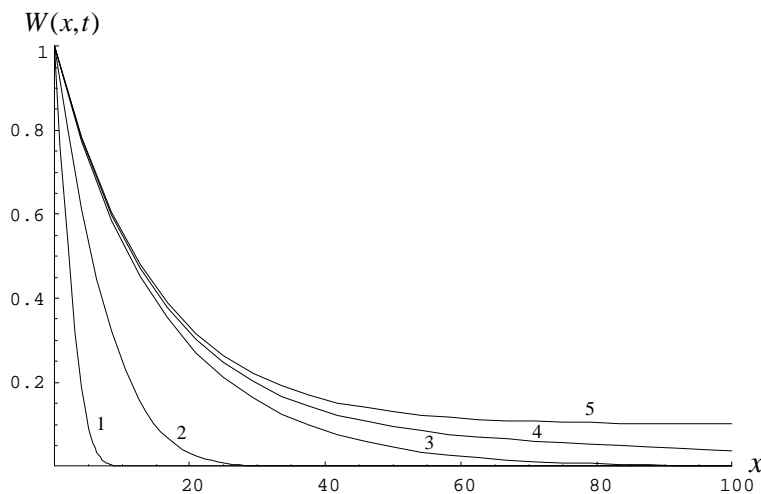


Рис. 2. Концентрация раствора для высокоскоростного потока в различные моменты времени: кривые 1–5 соответствуют значениям  $t = 10, 10^2, 10^3, 10^4, \infty$

По формулам (12)–(16) проведен ряд численных расчетов при различных значениях параметров процесса. Расчеты иллюстрируются рис. 1–3.

На рис. 1 изображены кривые зависимости безразмерной концентрации раствора от координаты точки (в метрах) для различных моментов времени (в сутках) при следующих значениях параметров:  $v = 0.5 \cdot 10^{-3}$  м/сут,  $m = 10^{-2}$ ,  $\sigma = 10^3$  м $^{-1}$ ,  $D = 5 \cdot 10^{-2}$  м $^2$ /сут,  $\tilde{D} = 10^{-5}$  м $^2$ /сут,  $\beta = 5 \cdot 10^{-4}$  сут $^{-1}$ ,  $\gamma = 10^{-3}$  сут $^{-1}$ ,  $C = 10^{-1}$ .

Считая приведенный выше вариант задания параметров исходным, изменим в нем значение фильтрационного расхода. На рис. 2 изображены соответствующие кривые для значения  $v = 2.5 \cdot 10^{-2}$  м/сут.

Сопоставление результатов расчетов, представленных на рис. 1 и 2, показывает, что концентрация раствора при фиксированных значениях координаты и времени с ростом фильтрационного расхода возрастает.

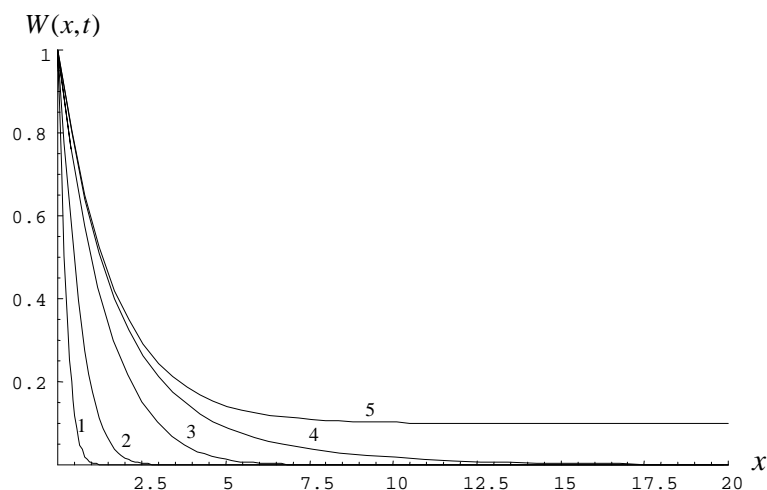


Рис. 3. Концентрация раствора при значениях коэффициента диффузии в порах,  $\tilde{D} = 10^{-4} \text{ м}^2/\text{сут}$

На рис. 3 показаны соответствующие кривые для концентрации раствора в случае, когда по сравнению с исходными данными эффективный коэффициент диффузии в порах больше в 10 раз.

Сопоставление рис. 1 и 3 подтверждает факт уменьшения концентрации раствора в трещинах с ростом величины  $\tilde{D}$  вследствие действия молекулярно-диффузионного механизма в порах.

### Заключение

Получено аналитическое представление, позволяющее при известных параметрах процесса находить концентрацию раствора в трещиновато-пористом массиве, в который поступает жидкость другого состава. Результаты могут быть использованы при оценке степени опасности загрязнения питьевой воды водой другого состава.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00333а, 10-01-00629а).

### Summary

*E. V. Skvortsov, E. A. Kosterina, D. R. Akhmetshina.* The Mixing of Groundwaters of Different Compositions in Cracked-Porous Media.

The mass transfer of groundwaters of different compositions in saturated cracked-porous media has been studied for the case of one-dimensional filtration. The solubility of the porous matrix substance due to the influence of the liquid entering the medium through the cracks has been taken into account. Using the Laplace transformation, an analytical solution to the problem of determining the concentration of the solute generated during such mass transfer has been obtained. The results of the corresponding calculations for the solute concentration distribution at different time points are given.

**Key words:** composition of groundwater, pollution, cracked-porous media, mass transfer, solute concentration.

**Литература**

1. *Tang D.H., Frind E.O., Sudicky E.A.* Contaminant transport in fractured porous media: Analytical solution for a single fracture // *Water Resour. Res.* – 1981. – V. 17, No 3. – P. 555–564.
2. *Sudicky E.A., Frind E.O.* Contaminant transport in fractured porous media: Analytical solutions for a system of parallel fractures // *Water Resour. Res.* – 1982. – V. 18, No 6. – P. 1634–1642.
3. *Костерин А.В., Скворцов Э.В., Храмченков М.Г.* Массоперенос при фильтрации растворов в трещиновато-пористых средах // *Инж.-физ. журн.* – 1991. – Т. 61, № 6. – С. 971–975.
4. *Храмченков М.Г.* Точные решения некоторых задач подземного массопереноса. – Казань: Казан. матем. о-во, 2005. – 126 с.
5. *Мироненко В.А., Румынин В.Г.* Опыт-но-миграционные работы в водоносных пластах. – М.: Недра, 1986. – 240 с.
6. *Ромм Е.С.* Структурные модели порового пространства горных пород. – Л.: Недра, 1985. – 240 с.
7. *Веригин Н.Н., Шершук Б.С.* Диффузия и массообмен при фильтрации жидкости в пористых средах // *Развитие исследований по теории фильтрации в СССР.* – М.: Наука, 1969. – С. 237–313.
8. *Питьева К.Е.* Гидрогеохимия. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. – 315 с.
9. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 488 с.
10. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 742 с.
11. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1962. – 1100 с.

Поступила в редакцию  
04.06.12

---

**Скворцов Эдуард Викторович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры моделирования экологических систем Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *Eduard.Scvortsov@rambler.ru*

**Костерина Екатерина Александровна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры моделирования экологических систем Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *Ekaterina.Kosterina@ksu.ru*

**Ахметшина Диляра Рашатовна** – студент кафедры моделирования экологических систем Казанского (Приволжского) федерального университета.